Clase 7: Funciones implícitas y Derivación implícita

C. J. Vanegas

27 de abril de 2008

☞ Recordamos en $\mathbb{R}^2$:

✌ $y = f(x)$ función explícita. Ej. $y = x^2 + 3$.

☞ $F(x, y) = 0$ función implícita. Ej. $\sin y = y \cos 2x \Rightarrow \sin y - y \cos 2x = 0$.

1. Derivación implícita

Si $y = y(x)$ calculamos $\frac{d}{dx}$ en el ejemplo $\sin y = y \cos 2x$ obteniendo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sin y(x) = \frac{d}{dx}(y(x)\cos 2x) \Rightarrow \cos y(x)\frac{dy(x)}{dx} &= \frac{dy(x)}{dx}\cos 2x - 2y(x)\sin 2x \\ \Rightarrow (\cos y(x) - \cos 2x)\frac{dy(x)}{dx} = -2y(x)\sin 2x \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} &= \frac{2y(x)\sin 2x}{\cos 2x - \cos y(x)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dy(x)}{dx} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} = -2y \sin 2x \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \cos 2x - \cos y \end{array} \right\}$$

Teorema 1. *(Caso particular)*
Supongamos que $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales continuas. Sean* $(\overline{x}, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *(*$\overline{x} \in \mathbb{R}$ *y* $z \in \mathbb{R}$*) y* $(\overline{x}_0, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tal que:*
$F(\overline{x}_0, z_0) = 0$ *y* $\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}_0, z_0)$.
Entonces existe una bola U *tal que* $\overline{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ *y una vecindad* V *de* $z_0 \in \mathbb{R}$ *tal que exista una única función* $g : U \longrightarrow V$*, definida por* $z = g(\overline{x})$ *que satisface* $F(\overline{x}, g(\overline{x})) = 0$.

Mas aun si $\overline{x} \in U$ *y* $z \in V$ *satisface* $F(\overline{x}, z) = 0$ *entonces* $z = g(\overline{x})$.
Además $z = g(\overline{x}) \in c^1$ *(Continuamente diferenciable), y* $Dg(\overline{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z)} D_{\overline{x}} F(\overline{x}, z)\Big|_{z=g(\overline{x})}$.
Aquí $D_{\overline{x}} F = (\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n})(\overline{x}, z)$.
(Es decir:$(\frac{\partial g}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial x_n})(\overline{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}}(\overline{x}, z)(\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F}{\partial x_n})(\overline{x}, z))$ *o idénticamente:*

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z)} \quad i = 1, ..., n}$$

Este teorema nos dice bajo que condiciones es posible escribir $F(\overline{x}, z) = 0, \quad z = g(\overline{x}) \in c^1$ de manera única y como es su derivada.

Ejemplo 1. ☚ *Considere la ecuación* $y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$.
Esto es $F(x, y, z) = F(\overline{x}, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$ *con* $n = 2$, *Aquí* $\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z) = x + 2z - e^z$.
Aplicamos el teorema a un punto $(\overline{x}_0, z_0)$ *que satisfaga* $y_0^2 + x_0 z_0 + z_0^2 - e^{z_0} - 4 = 0$ *con* $(\overline{x}_0 = (x_0, y_0))$ *y* $\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}_0, z_0) \leq 0 \Leftrightarrow x_0 + 2z_0 - e^{z_0} \leq 0$.
Luego cerca del punto (x_0, z_0), z *es una función única de* $\overline{x} = (x, y) : z = g(\overline{x})$. *Por ejemplo* $(\overline{x}_0, z_0) = (0, e, 2)$.
$Dg(\overline{x})$ *para* $\overline{x} = (0, e)$, *si* $g(0, e) = 2$*?*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} (\overline{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\overline{x}, z)} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} (\overline{x}, z)$$

Si $\overline{x} = (0, e)$ *y* $z = 2 \Rightarrow F(0, e, 2) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial x}(0, e, 2) = z \mid_{(0,e,2)} = 2$ $\frac{\partial F}{\partial y}(0, e, 2) = 2y \mid_{(0,e,2)} = 2e$ $\frac{\partial F}{\partial z}(0, e, 2) = 0 + 2 \cdot 2 - e^2 = 4 - e^2 \neq 0$ *vemos entonces que el teorema vale; luego* $Dg(0, e) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{4 - e^2} & \frac{-2e}{4 - e^2} \end{pmatrix}$.

1. $\begin{array}{l} x = u + v \\ y = uv \end{array}$

i *Encuentre una ecuación de la forma* $F(x, y, v)$ *que defina* v *como función de* x *e* y.

ii *Si escribimos* $v = h(x, y)$, *encuentre* $Dh(\overline{x})$

Solución 1. i $x = u + v \quad \Rightarrow \boxed{u = x - v} \Rightarrow y = (x - v)v^2 = xv^2 - v^3 \Rightarrow y - xv^2 - v^3 = 0$ *Definimos* $F(x, y, v) = y - xv^2 + v^3$ *Se puede escribir* $v = h(x, y)$ *en forma única en un entorno de los puntos* $(\overline{x_0}, v_0)$ *si* $F(\overline{x_0}, v_0) = 0$ *y* $\frac{\partial F}{\partial v}(\overline{x_0}, v_0) \neq 0$.

ii $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} (\overline{x_0}) = \dfrac{-1}{\frac{\partial f}{\partial v}(\overline{x_0}, v_0)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} (\overline{x_0}, v_0)$ $\dfrac{\partial F}{\partial v}(\overline{x_0}, v_0) = -2x_0v_0 + 3v_0^2$

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(\overline{x_0}, v_0) = -v_0^2$

$\dfrac{\partial F}{\partial y}(\overline{x_0}, v_0) = 1$ *por lo que* $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix} (\overline{x_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{v_0^2}{3v_0^2 - 2x_0v_0} & \dfrac{1}{2x_0v_0 - 3v_0^2} \end{pmatrix}$

Ahora en lugar de tratar de resolver una ecuación para una variable, trataremos de resolver m ecuaciones para m variables $z_1, ..., z_n$:

$$(*) \quad \begin{array}{l} F_1(\overline{x}, \tilde{z}) = 0 \quad \text{con } \overline{x} = (x_1, ..., x_n),\ \tilde{z} = (z_1, ..., z_n) \\ \quad \vdots \\ F_m(\overline{x}, \tilde{z}) = 0 \end{array}$$

Sea Δ el determinante de la matriz $m \times m$:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{pmatrix} := \frac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(z_1, ..., z_m)} \tag{2}$$

evaluado en $(\overline{x}_0, \tilde{z_0})$

Teorema 2. *(Caso general) Si $\Delta \neq 0$ entonces en una vecindad de $(\overline{x}_0, \tilde{z_0})$, $(*)$ define de manera única funciones $z_i : z_i = k_j(\overline{x})$, $i = 1, ..., m$. Sus derivadas se calculan mediante diferenciación implícita.*

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_j} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(z_1, ..., z_{i-1}, x_j, z_{i+1} ..., z_m)}}{\dfrac{\partial(F_1, ..., F_m)}{\partial(z_1, ..., z_m)}}$$

Ejemplo 2. *Mostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ podemos resolver* $\left.\begin{array}{l} xu + yvu^2 = 2 \\ xu^3 + y^2v^4 = 2 \end{array}\right\} (**)$ *de manera única para u y v como funciones de x e y. Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}$ en el punto $(1, 1)$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ en el punto $(1, 1)$*

Solución 2. *Aquí tenemos las ecuaciones:* $\begin{array}{l} F_1(x, y, u, v) = xu + yvu^2 - 2;\ \overline{x} = (x, y) \\ F_2(x, y, u, v) = xu^3 + y^2v_4 - 2;\ \tilde{z} = (u, v) \end{array}$ *así*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} (1, 1, 1, 1) = \begin{vmatrix} x + 2yvu & yu^2 \\ 3xu^2 & 4y^2v^3 \end{vmatrix} (1, 1, 1, 1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por lo que $(**)$ *se puede resolver de manera única para* u *y* v *como funciones de* x *e* y *cerca del punto* $(1,1,1,1)$ $u = z_1 = k_1(x,y)$ *y* $v = z_2 = k_2(x,y)$ *como* $z_1 = u$ *y* $z_2 = v$ *luego*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\overline{1}) = \frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}} = -\frac{3}{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(\overline{1}) = \frac{\partial z_1}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}} = -\frac{2}{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(\overline{1}) = \frac{\partial z_2}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}} = -\frac{3}{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(\overline{1}) = \frac{\partial z_2}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}} = -\frac{0}{9} = 0$$

Donde $\overline{1} = (1,1,1,1)$ *y* $\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(\overline{1}) = 9.$

Además podemos calcular simplemente para mostrar como se hace:

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(\overline{1}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}(1,1,1,1) = \begin{vmatrix} u & yu^2 \\ u^3 & 4y^2v^3 \end{vmatrix}(1,1,1,1) = 3$$